

Suite Majorée, Minorée, Bornée.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite :

- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **Majorée** si $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq M$.
- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **Minorée** si $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq m$.
- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **Bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :
 $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n| \leq M$.

Suites Croissante, Décroissante.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite :

- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **Croissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \geq u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **Strictement Croissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} > u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.
- ★ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **Strictement décroissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} < u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Remarque : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de premier terme u_p .

- ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **Croissante** donc $u_n \geq u_p$.
- ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** donc $u_n \leq u_p$.

Suites arithmétiques, Suites géométriques.

	Suite arithmétique	Suites géométriques
Définition	$u_{n+1} - u_n = r$ <i>r est la raison de u</i>	$v_{n+1} = qv_n$ <i>q est la raison de v</i>
a, b et c trois termes successif	$a + c = 2b$	$a \times c = b^2$
Formule explicite	$u_n = r(n - p) + u_p$ avec $n \geq p$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ avec $n \geq p$
Somme de tous les termes	$u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$	$v_p + \dots + v_n = v_p \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

Limite de la Suite géométrique q^n avec $q \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 < q < 1 \\ 1 & ; \quad q = 1 \\ +\infty & ; \quad q > 1 \end{cases}$$

☞ Critères de convergence :

Propriété 1 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques et l et α deux nombres réels tels que : $\alpha > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si : } (\forall n \geq N) : \begin{cases} |u_n - l| \leq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Propriété 2 :

Soit (u_n) et (v_n) et (w_n) trois suites numériques et soit $N \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$

$$\text{Si : } (\forall n \geq N) : \begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Propriété 3 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques et α un nombre réel tel que : $\alpha > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\star \text{ Si : } (\forall n \geq N) : \begin{cases} u_n \leq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty .$$

$$\star \text{ Si : } (\forall n \geq N) : \begin{cases} u_n \geq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty .$$

Propriété 4 :

- ★ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ★ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

☞ Limite d'une Suite définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I tel que : $f(I) \subset I$.

et soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

Si (u_n) est convergente, alors sa limite l est une solution dans I de l'équation $f(x) = x$.